Inauguration de la Chaire MMSN
(Modélisation Mathématique et Simulation Numérique)

Croissance quasi-statique de fissures dans des films minces

Jean-François Babadjian

CMAP, Ecole Polytechnique

Ecole Polytechnique, Palaiseau 20 octobre 2008

Plan

1 Description du modèle

Dans la configuration physique

$\Omega_\varepsilon := \omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné à frontière Lipschitz.

Densité d'énergie élastique: $W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ quasiconvexe, $\mathcal{C}^1$ à croissance $1 < p < \infty$.

Conditions limites:

- **Sections supérieures et inférieures** sont libres;
- **Bord latéral:** déformation $G^\varepsilon(t)$.

Fissures: Ensembles rectifiables $K^\varepsilon \subset \overline{\omega} \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ (t.q. $\mathcal{H}^2(K^\varepsilon) \leq c\varepsilon$).

> *i.e.* $K^\varepsilon \subset \bigcup_j M_j \cup N$ *où* $\forall j$, $M_j \subset$ *dans une hypersurface de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $\mathcal{H}^2(N) = 0$.

- **Energie de surface de type Griffith** $= \mathcal{H}^2(K^\varepsilon)$.

Déformations cinématiquement admissibles au temps t:

$v^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \setminus K^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$, v^ε est discontinue à travers K^ε et satisfait $v^\varepsilon = G^\varepsilon(t)$ sur le bord latéral.

- **Energie de volume** $= \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon \setminus K^\varepsilon} W(\nabla v^\varepsilon)\, dx.$

Espace fonctionnel (De Giorgi & Ambrosio): Si $U \subset \mathbb{R}^n$ alors $u \in SBV^p(U;\mathbb{R}^m)$ ssi $u \in L^1(U;\mathbb{R}^m)$ et $Du = \nabla u\, \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-) \otimes \nu_u\, \mathcal{H}^{n-1} \lfloor J_u$ est une mesure de Radon finie où

$$\begin{cases} \nabla u & = & \textit{gradient approché} \in L^p(U;\mathbb{R}^{m\times n}), \\ J_u & = & \textit{ensemble des discontinuités (rectifiable)}, \\ \nu_u & = & \textit{normale à } J_u, \\ u^\pm & = & \textit{traces de part et d'autre de } J_u. \end{cases}$$

Soit $\Omega'_\varepsilon := \omega' \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, où $\overline{\omega} \subset \omega'$ et $G^\varepsilon \in W^{1,1}([0,T]; W^{1,p}(\Omega'_\varepsilon;\mathbb{R}^3))$.

$$v^\varepsilon \in AD_\varepsilon(K^\varepsilon, G^\varepsilon(t)) \quad := \quad \big\{ v \in SBV^p({\Omega_\varepsilon}';\mathbb{R}^3) :\ J_v \subset K^\varepsilon \text{ et } v = G^\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } (\omega' \setminus \overline{\omega}) \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2) \big\};$$

Conditions initiales:

- **Pas de fissure préexistante:** $K^{\varepsilon}{}_0 = \emptyset$;
- $v^{\varepsilon}{}_0$ **déformation initiale** minimise

$$w \mapsto \int_{\Omega_\varepsilon} W(\nabla w)\, dx + \mathcal{H}^2(J_w),$$

parmi tous les $w \in SBV^p(\Omega'_\varepsilon; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant $w = G^{\varepsilon}(0)$ p.p. sur $(\omega' \setminus \overline{\omega}) \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$.

Existence d'une évolution quasi-statique au sens de *Francfort & Marigo*:

Dal Maso, Francfort & Toader $\Rightarrow \; \forall\, t \in [0,T]$, $\exists\, (v^{\varepsilon}(t), K^{\varepsilon}(t))$ une évolution quasi-statique t.q. $v^{\varepsilon}(0) = {v^{\varepsilon}}_0$, $K^{\varepsilon}(0) = J_{{v^{\varepsilon}}_0}$ et

- **Irréversibilité:** $K^{\varepsilon}(t_1) \subset K^{\varepsilon}(t_2)$, $\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$;
- **Principe de moindre énergie:** $\forall\, K' \supset K^{\varepsilon}(t)$, $\forall\, w \in AD_{\varepsilon}(K', G^{\varepsilon}(t))$,

$$E^{\varepsilon}(t) := \int_{\Omega_{\varepsilon}} W(\nabla v^{\varepsilon}(t))\, dx + \mathcal{H}^2(K^{\varepsilon}(t)) \leq \int_{\Omega_{\varepsilon}} W(\nabla w)\, dx + \mathcal{H}^2(K').$$

- **Principe de conservation d'énergie:** E^{ε} est absolument continue en temps et

$$E^{\varepsilon}(t) = E^{\varepsilon}(0) + \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla v^{\varepsilon}(s)) \cdot \nabla \dot{G}^{\varepsilon}(s)\, dx\, ds.$$

Dans la configuration "rescalée"

Dans le but de travailler sur un domaine indépendent de ε, on reformule le problème sur le cylindre "rescalé" $\Omega := \omega \times (-1/2, 1/2)$. On pose

$\forall\, (\underbrace{x_1, x_2}_{x_\alpha}, x_3) \in \Omega' = \omega' \times (-1/2, 1/2)$,

- $g^\varepsilon(x_\alpha, x_3, t) := G^\varepsilon(x_\alpha, \varepsilon x_3, t)$, $g^\varepsilon \in W^{1,1}([0,T]; W^{1,p}(\Omega'; \mathbb{R}^3))$;
- ${u^\varepsilon}_0(x_\alpha, x_3) := {v^\varepsilon}_0(x_\alpha, \varepsilon x_3)$, ${u^\varepsilon}_0 \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^3)$;
- $u^\varepsilon(x_\alpha, x_3, t) := v^\varepsilon(x_\alpha, \varepsilon x_3, t)$, $u^\varepsilon(t) \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^3)$;
- $\Gamma^\varepsilon(t) := \left\{(x_\alpha, x_3) \in \overline{\omega} \times (-1/2, 1/2) :\ (x_\alpha, \varepsilon x_3) \in K^\varepsilon(t)\right\} \subset \overline{\omega} \times (-1/2, 1/2)$.

Au temps $t = 0$: $u^\varepsilon(0) = {u^\varepsilon}_0$, $\Gamma^\varepsilon(0) = J_{{u^\varepsilon}_0}$.

Changement de variable:

$$\forall\ (x_\alpha, x_3) \in \Omega', \quad \begin{cases} \nabla_\alpha u^\varepsilon(x_\alpha, x_3, t) &= \nabla_\alpha v^\varepsilon(x_\alpha, \varepsilon x_3, t), \\ \nabla_3 u^\varepsilon(x_\alpha, x_3, t) &= \varepsilon \nabla_3 v^\varepsilon(x_\alpha, \varepsilon x_3, t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_\varepsilon} W(\nabla v^\varepsilon(t))\, dx = \varepsilon \int_{\Omega} W\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u^\varepsilon(t)\right) dx$$

$$\text{et } \forall\ (x_\alpha, x_3) \in \Gamma^\varepsilon(t), \quad \begin{cases} \left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_\alpha(x_\alpha, x_3) &= \left(\nu_{K^\varepsilon(t)}\right)_\alpha(x_\alpha, \varepsilon x_3), \\ \left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_3(x_\alpha, x_3) &= \varepsilon\left(\nu_{K^\varepsilon(t)}\right)_3(x_\alpha, \varepsilon x_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^2(K^\varepsilon(t)) = \int_{K^\varepsilon(t)} |\nu_{K^\varepsilon(t)}|\, d\mathcal{H}^2 = \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon(t)} \left| \left(\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon} \left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2.$$

On divise tout par ε pour obtenir un modèle de membrane.

- **Irréversibilité:** $\Gamma^\varepsilon(t_1) \subset \Gamma^\varepsilon(t_2)$, $\forall\, 0 \le t_1 \le t_2 \le T$;
- **Principe de moindre énergie:** $\forall\, \Gamma' \supset \Gamma^\varepsilon(t)$, $\forall\, v \in AD_1(\Gamma', g^\varepsilon(t))$,

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t) := \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t)\Big|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(t)\right)dx + \int_{\Gamma^\varepsilon(t)}\left|\left(\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_\alpha\Big|\frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_3\right)\right|d\mathcal{H}^2$$

$$\le \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha v\Big|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 v\right)dx + \int_{\Gamma'}\left|\left(\left(\nu_{\Gamma'}\right)_\alpha\Big|\frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{\Gamma'}\right)_3\right)\right|d\mathcal{H}^2.$$

- **Principe de conservation d'énergie:** $\mathcal{E}^\varepsilon$ est absolument continue en temps et

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t) = \mathcal{E}^\varepsilon(0) + \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial F}\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(s)\Big|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(s)\right)\cdot\left(\nabla_\alpha \dot{g}^\varepsilon(s)\Big|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 \dot{g}^\varepsilon(s)\right)dx\,ds.$$

Question: $(u^\varepsilon(t), \Gamma^\varepsilon(t)) \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\ ?$

2 Analyse du problème statique par Γ-convergence

Formulation faible (*De Giorgi & Ambrosio*): on remplace la fissure par l'ensemble des discontinuités de la déformation.

Soit $F_\varepsilon : SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$F_\varepsilon(u) := \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha u \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u\right) dx + \int_{J_u} \left| \left((\nu_u)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon}(\nu_u)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2.$$

Si u_ε^* minimise F_ε + C.L. alors $F_\varepsilon(u_\varepsilon^*) = \min\limits_{v\ +\ \text{C.L.}} F_\varepsilon(v) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} ?$ et $u_\varepsilon^* \xrightarrow{\varepsilon\to 0} ?$

Braides & Fonseca et *Bouchitté, Fonseca, Leoni & Mascarenhas*: énergie de surface à croissance linéaire par rapport au saut de déformation $[u] := u^+ - u^-$.

Problème: Manque de compacité des suites minimisantes. Si $\{u_\varepsilon\} \subset SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et $\sup_\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$, alors

$$\int_\Omega \left| \left(\nabla_\alpha u_\varepsilon \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u_\varepsilon \right) \right|^p dx + \int_{J_{u_\varepsilon}} \left| \left((\nu_{u_\varepsilon})_\alpha \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{u_\varepsilon})_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2 \leq c.$$

$\varepsilon \ll 1 \;\Rightarrow\; \|\nabla u_\varepsilon\|_p + \mathcal{H}^2(J_{u_\varepsilon}) \leq c$ mais on ne peut pas appliquer le Th. de compacité d'*Ambrosio*.

> *Si* $\{u_\varepsilon\} \subset SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *t.q.* $\|\nabla u_\varepsilon\|_p + \mathcal{H}^2(J_{u_\varepsilon}) \leq c$ *et*
>
> $$\|u^\varepsilon\|_\infty \leq c \text{ ou bien } \int_{J_{u_\varepsilon}} |u_\varepsilon{}^+ - u_\varepsilon{}^-|\, d\mathcal{H}^2 \leq c.$$
>
> *Alors* $\exists$ *une sous suite et* $u \in SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ *t.q.* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *faible dans* SBV^p *i.e.*
> $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$, $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} \nabla u$ *et* $\mathcal{H}^2(J_u) \leq \liminf_\varepsilon \mathcal{H}^2(J_{u_\varepsilon})$.

Si $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq c \;\Rightarrow\; u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$. De plus, comme

$$\int_\Omega |\nabla_3 u_\varepsilon|^p\, dx + \int_{J_{u_\varepsilon}} |(\nu_{u_\varepsilon})_3|\, d\mathcal{H}^2 \leq c\varepsilon \to 0 \;\Rightarrow\; D_3 u = 0 \;\Rightarrow\; u \in SBV^p(\omega;\mathbb{R}^3).$$

On définit

$$F_\infty(u) \quad := \quad \inf\Big\{ \liminf_{\varepsilon} F_\varepsilon(u_\varepsilon) : \; u_\varepsilon \in SBV^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \\ u_\varepsilon \to u \text{ fort dans } L^1(\Omega;\mathbb{R}^3) \text{ et } \|u_\varepsilon\|_\infty \le c\Big\}$$

Troncature par des fonctions régulières: $u \in L^\infty \;\Rightarrow\; F_\infty(u) = \Gamma\text{-}\lim_\varepsilon F_\varepsilon(u)$.

Théorème 1

$$F_\varepsilon(u) \xrightarrow[\varepsilon]{\Gamma(L^1)} F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u)\, dx_\alpha + \mathcal{H}^1(J_u) & \textit{si } u \in SBV^p(\omega;\mathbb{R}^3), \\ +\infty & \textit{sinon}, \end{cases}$$

où $W_0 : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $W_0(\bar F) := \inf_z W(\bar F|z)$ *et* QW_0 *est l'enveloppe quasiconvexe de* W_0*.*

L'énergie de volume QW_0 est la même que celle obtenue par *Le Dret & Raoult* dans une analyse dans $W^{1,p}$ (sans fissure).
L'énergie de surface est toujours de type *Griffith*.

3 Analyse du problème quasi-statique

$\forall\, t \in [0,T]$, $\exists\, (u^\varepsilon(t), \Gamma^\varepsilon(t))$ t.q. $u^\varepsilon(0) = {u^\varepsilon}_0$, $\Gamma^\varepsilon(0) = J_{{u^\varepsilon}_0}$ et:

- **Irréversibilité:** $\Gamma^\varepsilon(t_1) \subset \Gamma^\varepsilon(t_2)$, $\forall\, 0 \le t_1 \le t_2 \le T$;
- **Principe de moindre énergie:** $\forall\, \Gamma' \supset \Gamma^\varepsilon(t)$, $\forall\, v \in AD_1(\Gamma', g^\varepsilon(t))$,

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t) := \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(t)\right) dx + \int_{\Gamma^\varepsilon(t)} \left|\left(\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_3\right)\right| d\mathcal{H}^2$$

$$\le \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha v \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 v\right) dx + \int_{\Gamma'} \left|\left(\left(\nu_{\Gamma'}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{\Gamma'}\right)_3\right)\right| d\mathcal{H}^2.$$

- **Principe de conservation d'énergie:** $\mathcal{E}^\varepsilon$ est absolument continue en temps et

$$\mathcal{E}^\varepsilon(t) = \mathcal{E}^\varepsilon(0) + \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial F}\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(s) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(s)\right) \cdot \left(\nabla_\alpha \dot{g}^\varepsilon(s) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 \dot{g}^\varepsilon(s)\right) dx\, ds.$$

Hypothèses:

$$\left.\begin{array}{l} g^{\varepsilon} \to g \text{ in } W^{1,1}([0,T];W^{1,p}(\Omega';\mathbb{R}^3)) \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla_3 g^{\varepsilon} \to ? \text{ in } W^{1,1}([0,T];L^p(\Omega';\mathbb{R}^3)) \end{array}\right\} \Rightarrow g \in W^{1,1}([0,T];W^{1,p}(\omega';\mathbb{R}^3)).$$

Théorème 2 *On suppose de plus que* $\|u^{\varepsilon}(t)\|_{\infty} \le c$*, alors* $\forall\, t \in [0,T]$*,* $\exists\,(u(t),\gamma(t))$ *t.q.* $u^{\varepsilon}(t) \xrightarrow{SBV^p} u(t) \in SBV^p(\omega';\mathbb{R}^3)$*,* $\Gamma^{\varepsilon}(t)$ "$\to$" $\gamma(t) \subset \overline{\omega}$ *et*

- **Irréversibilité:** $\gamma(t_1) \subset \gamma(t_2)$, $\forall\, 0 \le t_1 \le t_2 \le T$;
- **Principe de moindre énergie:** $\forall\, \gamma' \supset \gamma(t)$, $\forall\, v \in SBV^p(\omega';\mathbb{R}^3)$ *avec* $J_v \subset \gamma'$ *et* $v = g(t)$ *p.p. dans* $\omega' \setminus \overline{\omega}$,

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\omega} QW_0(\nabla_{\alpha} u(t))\, dx_{\alpha} + \mathcal{H}^1(\gamma(t)) \le \int_{\omega} QW_0(\nabla_{\alpha} v)\, dx_{\alpha} + \mathcal{H}^1(\gamma').$$

- **Principe de conservation d'énergie:** $\mathcal{E}$ *est absolument continue en temps et*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_{\omega} \frac{\partial(QW_0)}{\partial F}(\nabla_{\alpha} u(s)) \cdot \nabla_{\alpha} \dot{g}(s)\, dx_{\alpha}\, ds.$$

De plus,

$$\mathcal{E}^{\varepsilon}{}_b(t) := \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t)\Big|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(t)\right)dx \to \int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u(t))\,dx_\alpha =: \mathcal{E}_b(t)$$

$$\mathcal{E}^{\varepsilon}{}_s(t) := \int_{\Gamma^\varepsilon(t)}\left|\left(\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_\alpha\Big|\frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{\Gamma^\varepsilon(t)}\right)_3\right)\right|d\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^1(\gamma(t)) =: \mathcal{E}_s(t)$$

En particulier $\Rightarrow\ \mathcal{E}^\varepsilon(t) \to \mathcal{E}(t)$.

Convergence d'ensembles rectifiables: σ^p-convergence (*Dal Maso, Francfort & Toader*) avec des modifications pour le passage 3d2d: $\Gamma^\varepsilon(t)$" $\to$ "$\gamma(t)$ ssi:

(i) Si $v_\varepsilon \in SBV^p(\Omega';\mathbb{R}^3)$ est t.q. $J_{v_\varepsilon} \subset \Gamma^\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon \xrightarrow{SBV^p} v$ et $\int_\Omega \left|\left(\nabla_\alpha v_\varepsilon|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 v_\varepsilon\right)\right|^p dx \le c$, alors $v \in SBV^p(\omega';\mathbb{R}^3)$ et $J_v \subset \gamma(t)$;

(ii) Il existe $\bar{v}_\varepsilon \in SBV^p(\Omega';\mathbb{R}^3)$ et $\bar{v} \in SBV^p(\omega';\mathbb{R}^3)$ t.q. $J_{\bar{v}_\varepsilon} \subset \Gamma^\varepsilon(t)$, $\bar{v}_\varepsilon \xrightarrow{SBV^p} \bar{v}$, $\int_\Omega \left|\left(\nabla_\alpha \bar{v}_\varepsilon|\frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 \bar{v}_\varepsilon\right)\right|^p dx \le c$ et $J_{\bar{v}} = \gamma(t)$.

Propriétés: Compacité (Th. de Helly), s.c.i par rapport à la mesure de Hausdorff

...

Idée de la démonstration:

Fissure limite: $\exists\, \gamma(t) \subset \overline{\omega}$ (croissante en temps) t.q. $\forall\, t \in [0,T]$, $\Gamma^{\varepsilon}(t) \to \gamma(t)$ en un sens très proche de la σ^p-convergence introduite par *Dal Maso, Francfort & Toader* (avec des modifications adequates pour le cas du passage 3d2d) et par s.c.i. par rapport à la mesure de Hausdorff:

$$\mathcal{H}^1(\gamma(t)) \leq \liminf_{\varepsilon} \int_{\Gamma^{\varepsilon}(t)} \left| \left(\left(\nu_{\Gamma^{\varepsilon}(t)}\right)_{\alpha} \middle| \frac{1}{\varepsilon} \left(\nu_{\Gamma^{\varepsilon}(t)}\right)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2.$$

Déformation limite: Par la propriété de minimalité, $J_{u^\varepsilon(t)} \subset \Gamma^\varepsilon(t)$ et

$$\|u^\varepsilon(t)\|_\infty + \int_\Omega \left| \left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u^\varepsilon(t) \right) \right|^p dx + \int_{J_{u^\varepsilon(t)}} \left| \left(\left(\nu_{u^\varepsilon(t)}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon} \left(\nu_{u^\varepsilon(t)}\right)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2 \leq c.$$

Th. d'*Ambrosio* $\Rightarrow$ $u^\varepsilon(t) \xrightarrow{SBV^p} u(t) \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^3)$, pour une sous suite suite dépendante du temps, $u(t) = g(t)$ p.p. sur $\omega' \setminus \overline{\omega}$ and $J_{u(t)} \subset \gamma(t)$. De plus, comme QW_0 est quasiconvexe

$$\begin{aligned} 2 \int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u(t))\, dx_\alpha &\leq \liminf_\varepsilon 2 \int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t))\, dx_\alpha \\ &\leq \liminf_\varepsilon \int_\Omega W \left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u^\varepsilon(t) \right) dx. \end{aligned}$$

Principe de moindre énergie:

- A l'instant initial $t = 0$, comme il n'y a pas de fissure préexistante, on peut prendre une suite qui atteint la Γ-limite comme compétiteur dans la minimisation: $\forall\, v \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^3)$ t.q. $v = g(0)$ p.p. dans $\omega' \setminus \overline{\omega}$, $\exists\, v_\varepsilon \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^3)$ avec $v_\varepsilon = g^\varepsilon(0)$ p.p. dans $(\omega' \setminus \overline{\omega}) \times (-1, 1)$

$$
\begin{aligned}
&2\int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u(0))\,dx_\alpha + 2\mathcal{H}^1(J_{u(0)}) \\
&\quad \leq \liminf_{\varepsilon} \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(0) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(0)\right) dx + \int_{J_{u^\varepsilon(0)}} \left| \left(\left(\nu_{u^\varepsilon(0)}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{u^\varepsilon(0)}\right)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2 \\
&\quad \leq \limsup_{\varepsilon} \int_\Omega W\left(\nabla_\alpha v_\varepsilon \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 v_\varepsilon\right) dx + \int_{J_{v_\varepsilon}} \left| \left(\left(\nu_{v_\varepsilon}\right)_\alpha \Big| \frac{1}{\varepsilon}\left(\nu_{v_\varepsilon}\right)_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2 \\
&\quad = 2\int_\omega QW_0(\nabla_\alpha v)\,dx_\alpha + 2\mathcal{H}^1(J_v).
\end{aligned}
$$

En particulier, si $v = u(0) \;\Rightarrow\; {\mathcal{E}^\varepsilon}_b(0) \to \mathcal{E}_b(0)$, ${\mathcal{E}^\varepsilon}_s(0) \to \mathcal{E}_s(0)$ et $\mathcal{E}^\varepsilon(0) \to \mathcal{E}(0)$

- $\forall\, t \in (0,T]$: Th. de Transfert de saut "rescalé" (*Francfort & Larsen*):
  $\forall\, v \in SBV^p(\omega';\mathbb{R}^3)$ avec $v = g(t)$ p.p. dans $\omega' \setminus \overline{\omega}$, $\exists\, v_\varepsilon \in SBV^p(\Omega';\mathbb{R}^3)$ avec $v_\varepsilon = g^\varepsilon(t)$ p.p. dans $(\omega' \setminus \overline{\omega}) \times (-1,1)$ t.q. $v_\varepsilon \xrightarrow{L^1} v$ et $\nabla v_\varepsilon \xrightarrow{L^p} (\nabla_\alpha v|0)$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{J_{v_\varepsilon} \setminus \Gamma^\varepsilon(t)} \left| \left((\nu_{v_\varepsilon})_\alpha \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{v_\varepsilon})_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2 \leq 2\mathcal{H}^1(J_v \setminus \gamma(t)).$$

  Donc en modifiant "légèrement" v_ε, on obtient que

$$2 \int_\omega QW_0(\nabla_\alpha u(t))\, dx_\alpha \leq \liminf_\varepsilon \int_\Omega W \left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 u^\varepsilon(t) \right) dx$$
$$\leq \limsup_\varepsilon \int_\Omega W \left(\nabla_\alpha v_\varepsilon \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 v_\varepsilon \right) dx + \int_{J_{v_\varepsilon} \setminus \Gamma^\varepsilon(t)} \left| \left((\nu_{v_\varepsilon})_\alpha \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{v_\varepsilon})_3 \right) \right| d\mathcal{H}^2$$
$$\lesssim 2 \int_\omega QW_0(\nabla_\alpha v)\, dx_\alpha + 2\mathcal{H}^1(J_v \setminus \gamma(t)).$$

  En particulier $v = u(t) \;\Rightarrow\; \mathcal{E}^\varepsilon{}_b(t) \to \mathcal{E}_b(t)$.

Bilan d'énergie: 1- Approximation de l'intégrale de Lebesgue par des sommes de Riemann convenablement choisies

$$\Rightarrow \ \mathcal{E}(t) \geq \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_\omega \frac{\partial (QW_0)}{\partial F}(\nabla_\alpha u(s)) \cdot \nabla_\alpha \dot{g}(s)\, dx_\alpha\, ds.$$

2- Convergence faible du tenseur des contraintes:

$$\left.\begin{array}{l} u^\varepsilon(t) \xrightarrow{SBV^p} u(t) \\ \mathcal{E}^\varepsilon{}_b(t) \to \mathcal{E}_b(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial F}\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(t) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(t)\right) \xrightarrow{L^{p'}} \left(\frac{\partial (QW_0)}{\partial F}(\nabla_\alpha u(t)) \Big| 0\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq \liminf_{\varepsilon} \mathcal{E}^\varepsilon(t) \leq \limsup_{\varepsilon} \mathcal{E}^\varepsilon(t) \\
&= \lim_{\varepsilon} \mathcal{E}^\varepsilon(0) + \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial F}\left(\nabla_\alpha u^\varepsilon(s) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 u^\varepsilon(s)\right) \cdot \left(\nabla_\alpha \dot{g}^\varepsilon(s) \Big| \frac{1}{\varepsilon}\nabla_3 \dot{g}^\varepsilon(s)\right) dx\, ds \\
&= \mathcal{E}(0) + 2\int_0^t \int_\omega \frac{\partial (QW_0)}{\partial F}(\nabla_\alpha u(s)) \cdot \nabla_\alpha \dot{g}(s)\, dx_\alpha\, ds \ \Rightarrow \ \mathcal{E}^\varepsilon(t) \to \mathcal{E}(t).
\end{aligned}$$